

DEĞİŞKEN KESİTLİ DOĞRU EKSENLİ KOMPOZİT ÇUBUKLARIN SERBEST VE ZORLANMIŞ TİTREŞİMİ

Faruk Fırat Çalım ve Mehmet Kırac

Mustafa Kemal Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Hatay
e-mail: ffcetim@mku.edu.tr

ÖZET

Değişken kesitli doğru eksenli kompozit çubukların zamanla değişen yükler altındaki dinamik davranışı Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir. Değişken kesitli doğru eksenli kompozit çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanarak elde edilmiştir. Formülasyonda, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Çubuk malzemesi homojen, lineer elastik ve anizotropik kabul edilmiştir. Laplace uzayında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, problemin dinamik rijitlik matrisini kesin olarak hesaplamak için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Elde edilen çözümler, Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak zaman uzayına dönüştürülmektedir. Değişken kesitli doğru eksenli kompozit çubukların serbest ve zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Kesit değişim parametresinin (β) dinamik davranışa etkisi araştırılmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçların ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

ABSTRACT

The dynamic behavior of composite straight rods with variable cross-section subjected to time-dependent loads is theoretically investigated in the Laplace domain. The governing equations for composite straight beams with variable cross-section are obtained using Timoshenko beam theory. The effect of the rotary inertia, axial and shear deformations are considered in the formulations. The material of the rod is assumed to be homogeneous, linear elastic and anisotropic. Ordinary differential equations in scalar form obtained in the Laplace domain are solved numerically using the complementary functions method to calculate the dynamic stiffness matrix of the problem accurately. The solutions obtained are transformed to the real space using the Durbin's numerical inverse Laplace transform method. The free and forced vibrations of composite straight rods with variable cross-section are analyzed. The effect of cross-section variability parameter (β) on dynamic behavior is investigated. The results obtained in this study are found to be in good agreement with those obtained from ANSYS.

1. GİRİŞ

Değişken kesitli çubuklar önemli bir mühendislik problemi olarak güncelliğini korumaktadır. Modern mühendislik yapılarında yüksek mukavemet, hafif malzeme gibi özelliklerden dolayı kompozit çubukların davranışı ile ilgili çalışmalar önem kazanmıştır. Kompozit malzemeler kiriş, plak ve kabuk gibi yapı sistemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Cranch ve Adler [1], üniform olmayan kirişlerin doğal frekansları için kapalı çözüm sunmuşlardır. Chen ve Xie [2], değişken kesitli kirişlerin doğal frekanslarını hesaplamak için yeni bir sayısal yöntem önermişlerdir. Eisenberger ve Reich [3], değişken kesitli kiriş problemini analiz etmek amacı ile yaklaşık bir sonlu eleman yöntemi tanımlamışlardır. Sabit kesitli kirişleri deplasman fonksiyonu kullanarak rijitlik ve tutarlı kütle matrislerini türetmişlerdir. Jategaonkar ve Chehil [4] ve Lee ve ark. [5], değişken kesitli kirişlerin doğal frekanslarını araştırmışlardır. Eisenberger [6], değişken kesitli kirişlerin çözümü için yeni bir formülasyon sunmuşlardır. Nakahira ve ark. [7], Stodola-Newmark yöntemini kullanarak değişken kesitli kirişlerin titreşimini incelemişlerdir. Leung ve Zhou [8], farklı sınır şartlarına sahip üniform olmayan Timoshenko kirişini analiz etmek için bir dinamik rijitlik yöntemi belirtmişlerdir. Abrate [9], lineer azalan kesite sahip kirişlerin dinamik davranışı için kesin çözüm sunmuştur. Lineer azalan kesite sahip kirişlerin serbest titreşim analizi için genel bir prosedür geliştirmiştir. Tong ve ark. [10], değişken kesitli Timoshenko kirişinin serbest ve zorlanmış titreşim analizlerini araştırmışlardır. Rao ve Ganesan [11-12], değişken kesitli kompozit kirişlerin harmonik davranışını bir sonlu eleman modeli kullanarak araştırmıştır. Romano [13], çubuk boyunca kesiti lineer veya parabolik olarak değişen kirişler için kapalı formda çözümler sunmuştur. Qiushang ve ark. [14], değişken kesitli doğru eksenli çubukların titreşim davranışlarını idare eden denklemleri yazmışlardır. De Rosa ve Auciello [15], kesiti lineer olarak değişen kirişlerin dinamik davranışını incelemişlerdir. Ece ve ark. [16], değişken kesite sahip kirişlerin titreşimini araştırmışlardır. Çalım [17], izotropik-anizotropik ve elastik-viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların zamanla değişen yükler altında dinamik davranışını araştırmıştır.

Değişken kesitli doğru eksenli izotropik kirişlerin serbest titreşimine ait birçok çalışma olmasına rağmen, değişken kesitli anizotropik kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimine ait çalışmalar yeterli değildir.

Bu çalışmada, değişken kesitli, doğru eksenli kompozit çubukların serbest ve zorlanmış titreşimleri Laplace uzayında incelenmiştir. Timoshenko çubuk teorisi kullanarak doğru eksenli çubukları idare eden denklemler elde edilmiştir. Formülasyonda, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Kanonik formda Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak [17,18] problemin dinamik rijitlik matrisi hesaplanmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır [17-18].

2. FORMÜLASYON

Çubuk eksenini üzerinde herhangi bir x noktasında yer değiştirme $U^0(x, t)$ ve bu noktadaki kesitin dönmesi $\Omega^0(x, t)$ olarak gösterilsin. $\mathbf{T}(x, t)$ vektörü ile t anında x noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve $\mathbf{M}(x, t)$ ile bunların ağırlık merkezi olan G noktasına indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterilsin. Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet $\mathbf{p}^{ex}(x, t)$ ve moment $\mathbf{m}^{ex}(x, t)$ olsun.

Çubuk malzemesi lineer elastik ve anizotropiktir. Kompozit uzaysal çubuğu idare eden denklemler vektörel formda elde edilmektedir.

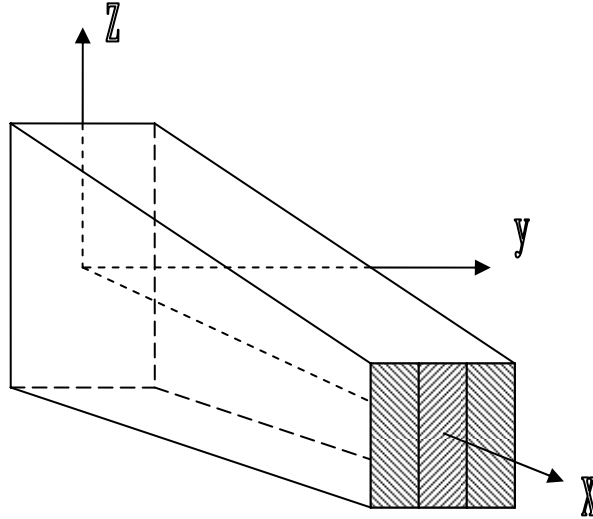
$$\frac{\partial \mathbf{U}^o}{\partial x} = \mathbf{A}'\mathbf{T} + \mathbf{B}'\mathbf{M} + \mathbf{\Omega}^o \times \mathbf{i} , \quad \frac{\partial \mathbf{\Omega}^o}{\partial x} = \mathbf{F}'\mathbf{T} + \mathbf{D}'\mathbf{M} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^o}{\partial x} + \mathbf{p}^{(ex)} = \mathbf{p}^{(in)} , \quad \frac{\partial \mathbf{M}^o}{\partial x} + \mathbf{i} \times \mathbf{T}^o + \mathbf{m}^{(ex)} = \mathbf{m}^{(in)} \quad (2)$$

\mathbf{p}^{in} kütleli atalet kuvveti ve \mathbf{m}^{in} kütleli atalet momenti ifadeleri

$$\mathbf{p}_i^{(in)} = -\rho A \frac{\partial^2 \mathbf{U}_i^o}{\partial t^2} , \quad \mathbf{m}_i^{(in)} = -\rho I_i \frac{\partial^2 \mathbf{\Omega}_i^o}{\partial t^2} \quad (i = x, y, z) \quad (3)$$

olmak üzere, burada ρ , kütleli yoğunluğu göstermektedir. I_x burulma ve I_y, I_z ise eğilme atalet momentleridir. $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}$ ve \mathbf{D} matrisleri çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini göstermekte olup her bir tabaka malzemesinin esneklik sabitleri cinsinden elde edilmektedir (Şekil 1).



Şekil 1. Değişken kesitli kompozit çubuk

Kısaltılmış notasyonu kullanarak lineer elastik malzeme için genelleştirilmiş Hooke kanunu kapalı formda

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j=1, 2, \dots, 6) \quad (4)$$

olarak ifade edilir. Burada C_{ij} rijitlik matrisidir. En genel halde lineer, elastik, anizotropik malzeme için 36 eleman, 21 bağımsız sabit bulunmaktadır.

Hooke kanunu, esneklik matrisi cinsinden de ifade edilebilir. Esneklik matrisi S_{ij} , gerilme-şekil değiştirme bağıntısının tersi olarak tanımlanır. Şekil değiştirme ile gerilme arasındaki ilişki kapalı formda olarak verilmektedir. Esneklik matrisi, C_{ij} rijitlik matrisinin tersidir.

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j , \quad S_{ij} = C_{ij}^{-1} \quad (5)$$

Esneklik matrisi S_{ij} ile rijitlik matrisi C_{ij} birbirlerinin tersi olmasından dolayı, rijitlik matrisinin bileşenleri esneklik matrisi bileşenleri cinsinden ifade edilmektedir [19].

$$C_{11} = \frac{S_{22} S_{33} - S_{23}^2}{S} , \quad C_{12} = \frac{S_{13} S_{23} - S_{12} S_{33}}{S} , \quad C_{13} = \frac{S_{12} S_{23} - S_{13} S_{22}}{S}$$

$$C_{22} = \frac{S_{11}S_{33} - S_{13}^2}{S}, \quad C_{23} = \frac{S_{12}S_{13} - S_{11}S_{23}}{S}, \quad C_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S} \quad (6)$$

$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}}, \quad C_{55} = \frac{1}{S_{55}}, \quad C_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

Burada

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{13}S_{23} \quad (7)$$

bağıntısı ile verilmektedir.

Ortotropik malzemenin asal malzeme eksenleri ile çubuk eksenleri genelde çakışmazlar (Şekil 2). Keyfi olarak seçilmiş fiber doğrultusu ile çubuk eksenleri arasındaki açı θ ile gösterilmektedir. 1, 2, 3 koordinatlarında ve 3 eksen etrafında döndürülmüş gerilme-şekil değiştirme ve şekil değiştirme-gerilme bağıntıları

$$\sigma_i = C'_{ij} \varepsilon_j, \quad \varepsilon_i = S'_{ij} \sigma_j \quad (i, j=1, 2, \dots, 6) \quad (8)$$

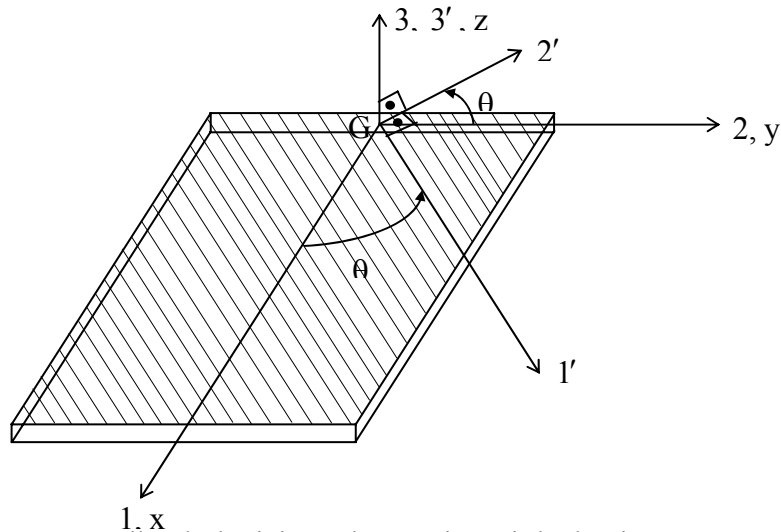
şeklinde yazılabilir. Burada C'_{ij} ve S'_{ij} sırasıyla dönüştürülmüş rijitlik ve esneklik matrisleri olup aşağıdaki verilen bağıntılar yardımı ile hesaplanmaktadır [19].

$$[C'] = [T]^{-1} [C] [R] [T] [R]^{-1}, \quad [S'] = [R] [T]^{-1} [R]^{-1} [S] [T] \quad (9)$$

Burada $m = \cos \theta$ ve $n = \sin \theta$ olmak üzere dönüşüm matrisleri

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ \text{simetrik} & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

şeklinde dir.



Şekil 2. Ortotropik tabaka için malzeme simetri düzlemi

Dönüştürülmüş ve indirgenmiş gerilme-şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\tilde{\sigma}_i = \tilde{Q}'_{ij} \tilde{\varepsilon}_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (11)$$

Ortotropik tabakalı çubuk için dönüştürülmüş ve indirgenmiş rijitlik matrisinin sıfırdan farklı elemanları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} \tilde{Q}'_{11} &= C'_{11} + (C'_{12} S'_{12} + C'_{13} S'_{31})\alpha'_{11} + (C'_{12} S'_{26} + C'_{13} S'_{36})\alpha'_{61} \\ \tilde{Q}'_{12} &= C'_{16} + (C'_{12} S'_{21} + C'_{13} S'_{31})\alpha'_{16} + (C'_{12} S'_{26} + C'_{13} S'_{36})\alpha'_{66} \\ \tilde{Q}'_{22} &= C'_{66} + (C'_{62} S'_{21} + C'_{63} S'_{31})\alpha'_{16} + (C'_{62} S'_{26} + C'_{63} S'_{36})\alpha'_{66} \\ \tilde{Q}'_{33} &= C'_{55} \end{aligned} \quad (12)$$

Burada

$$\alpha'_{11} = \frac{S'_{66}}{S'_{11} S'_{66} - S'^2_{16}}, \quad \alpha'_{16} = \alpha'_{61} = \frac{-S'_{16}}{S'_{11} S'_{66} - S'^2_{16}}, \quad \alpha'_{66} = \frac{S'_{11}}{S'_{11} S'_{66} - S'^2_{16}} \quad (13)$$

3. KOMPOZİT ÇUBUKLAR İÇİN BÜNYE DENKLEMLERİ

Kuvvet ve momentler, rölatif birim uzama ve dönme cinsinden ifade edilirler.

$$T_i = A_{ij} \tilde{\gamma}_j^0 + B_{ij} \tilde{\omega}_j^0, \quad M_i = F_{ij} \tilde{\gamma}_j^0 + D_{ij} \tilde{\omega}_j^0 \quad (i, j=1,2,3) \quad (14)$$

Burada

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_A \tilde{Q}_{ij} dA & B_{ij} &= \varepsilon_{mjk} \int_A \tilde{Q}_{im} x_k dA \\ F_{ij} &= \varepsilon_{ikm} \int_A x_k \tilde{Q}_{mj} dA & D_{ij} &= \varepsilon_{ihk} \varepsilon_{mjp} \int_A x_h x_p \tilde{Q}_{km} dA \end{aligned} \quad (15)$$

olmak üzere **A**, **B**, **F**, **D** matrisleri (3×3) boyutunda olup kesit geometrisi ve malzeme özelliklerine bağlıdır [20]. (14) eşitliklerinin tersini alarak bünye denklemleri

$$\tilde{\gamma}_i^0 = A'_{ij} T_j + B'_{ij} M_j, \quad \tilde{\omega}_i^0 = F'_{ij} T_j + D'_{ij} M_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (16)$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \mathbf{F}^*, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1}, \quad \mathbf{F}' = -\mathbf{D}^{*-1} \mathbf{F}^*, \quad \mathbf{D}' = \mathbf{D}^{*-1} \\ \mathbf{A}^* &= \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{B}^* = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{F} \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{D}^* = \mathbf{D} - \mathbf{F} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (17)$$

A, **B**, **F** ve **D** matrisleri çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini göstermekte olup her bir tabaka malzemesinin esneklik sabitleri cinsinden elde edilmektedir [20]. y ve z eksenleri asal eksenler olup, kesit bu eksenlere göre geometri ve malzeme bakımından simetrik olduğu düşünülürse **B** = **F** = 0 olur. Böylece **A** ve **D** matrislerinin sıfırdan farklı elemanları, indirgenmiş rijitlik matrisi cinsinden

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{11}^{(k)} A^{(k)}, & A_{12} &= \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{12}^{(k)} A^{(k)}, & A_{22} &= \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{22}^{(k)} A^{(k)} \\
A_{33} &= \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{33}^{(k)} A^{(k)}, & D_{11} &= \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{33}^{(k)} I_3^{(k)} + \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{22}^{(k)} I_2^{(k)}, \\
D_{12} &= -\sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{21}^{(k)} I_2^{(k)}, & D_{22} &= \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{11}^{(k)} I_2^{(k)}, & D_{33} &= \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{11}^{(k)} I_3^{(k)}
\end{aligned} \tag{18}$$

ifade edilirler. Dönüştürülmüş \mathbf{A}' ve \mathbf{D}' matrisleri (17) eşitlikleri yardımı ile aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned}
A'_{11} &= \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, & A'_{12} &= -\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, & A'_{22} &= \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, & A'_{33} &= \frac{1}{A_{33}} \\
D'_{11} &= \frac{D_{22}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}, & D'_{12} &= -\frac{D_{12}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}, & D'_{22} &= \frac{D_{11}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}, & D'_{33} &= \frac{1}{D_{33}}
\end{aligned} \tag{19}$$

4. SERBEST ve ZORLANMIŞ TİTREŞİM İÇİN HAREKET DENKLEMLERİ

Zorlanmış titreşim durumu için, $\mathbf{Y}(x, t)$ kolon matrisi

$$\mathbf{Y}(x, t) = \{U_x^o, U_y^o, U_z^o, \Omega_x^o, \Omega_y^o, \Omega_z^o, T_x^o, T_y^o, T_z^o, M_x^o, M_y^o, M_z^o\}^T \tag{20}$$

olarak tanımlanmaktadır. (20) ifadesinin zamana göre Laplace dönüşümü, $t > 0$ için $L[\mathbf{Y}(x, t)] = \bar{\mathbf{Y}}(x, s)$ ise

$$\bar{\mathbf{Y}}(x, s) = \int_0^\infty \mathbf{Y}(x, t) e^{-st} dt \tag{21}$$

olup, burada Laplace dönüşüm parametresi s kompleks bir sayıdır. Bu tariflerin yardımıyla (1) ve (2) eşitlikleri birinci mertebeden 12 adet adi diferansiyel denklem haline dönüştürülmektedir.

Serbest titreşim analizi için, $p_i^{(ex)} = 0$ ve $m_i^{(ex)} = 0$ ($i = x, y, z$) alınmaktadır. Harmonik titreşim kabulü ile $\mathbf{U}^o, \boldsymbol{\Omega}^o, \mathbf{T}^o$ ve \mathbf{M}^o vektörleri aşağıda verilmektedir.

$$\mathbf{U}^o(x, t) = \mathbf{U}^*(x) e^{i\omega t}, \quad \boldsymbol{\Omega}^o(x, t) = \boldsymbol{\Omega}^*(x) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{T}^o(x, t) = \mathbf{T}^*(x) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{M}^o(x, t) = \mathbf{M}^*(x) e^{i\omega t} \tag{22}$$

(22) ifadesi (1) ile (2) denkleminde yerine konulduğunda, birinci mertebeden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı elde edilir. Eğer, deplasmanlar ve bunlara karşılık gelen kuvvetler, $\mathbf{Y}^*(x)$ kolon matrisinin bileşenleri olarak düşünülürse, bu on 12 adet denklem matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{d\mathbf{Y}^*(x)}{dx} = \mathbf{F}(x, \omega) \mathbf{Y}^*(x) \tag{23}$$

Sistem dinamik rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan ω değerleri problemin doğal frekanslarını vermektedir.

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü kabul edilmektedir. Seçilen kesitin geometri ve malzeme bakımından simetrik olduğu düşünülürse, dik koordinat

takımında N adet kompozit tabakadan oluşan değişken kesitli doğru eksenli çubukların dinamik davranışını idare eden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı Laplace uzayında kanonik formda aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{d\bar{U}_x}{dx} = A'_{11} \bar{T}_x \quad (24a)$$

$$\frac{d\bar{U}_y}{dx} = \Omega_z + \alpha_y A'_{22} \bar{T}_y \quad (24b)$$

$$\frac{d\bar{U}_z}{dx} = -\bar{\Omega}_y + \alpha_z A'_{33} \bar{T}_z \quad (24c)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_x}{dx} = D'_{11} \bar{M}_x \quad (24d)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_y}{dx} = D'_{22} \bar{M}_y \quad (24e)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_z}{dx} = D'_{33} \bar{M}_z \quad (24f)$$

$$\frac{d\bar{T}_x}{dx} = s^2 \tilde{A} \bar{U}_x + \bar{V}_7 \quad (24g)$$

$$\frac{d\bar{T}_y}{dx} = s^2 \tilde{A} \bar{U}_y + \bar{V}_8 \quad (24h)$$

$$\frac{d\bar{T}_z}{dx} = s^2 \tilde{A} \bar{U}_z + \bar{V}_9 \quad (24i)$$

$$\frac{d\bar{M}_x}{dx} = s^2 \tilde{I}_x \bar{\Omega}_x + \bar{V}_{10} \quad (24j)$$

$$\frac{d\bar{M}_y}{dx} = s^2 \tilde{I}_y \bar{\Omega}_y + \bar{T}_z + \bar{V}_{11} \quad (24k)$$

$$\frac{d\bar{M}_z}{dx} = s^2 \tilde{I}_z \bar{\Omega}_z - \bar{T}_y + \bar{V}_{12} \quad (24l)$$

$\bar{V}(x,s)$ kolon matrisinin elemanları (25) denkleminde verilmiştir. Laplace dönüşümünden gelen başlangıç şartları, $\bar{V}(x,s)$ yük vektörüne dahil edilmektedir.

$$\bar{V}_i(x,s) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

$$\bar{V}_{6+j}(x,s) = -(\bar{p}_j^{(ex)}) - \rho \tilde{A} \left[s U_j^\circ(x,0) + \frac{\partial U_j^\circ(x,0)}{\partial t} \right] \quad (j=1, 2, 3)$$

(25)

$$\bar{V}_{9+j}(x,s) = -(\bar{m}_j^{(ex)}) - \rho \tilde{I}_j \left[s \Omega_j^\circ(x,0) + \frac{\partial \Omega_j^\circ(x,0)}{\partial t} \right]$$

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} A^{(k)} \quad , \quad \tilde{I}_2 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} (x_3)^2 dA \quad , \quad \tilde{I}_3 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} (x_2)^2 dA$$

(26)

5. SAYISAL UYGULAMA

İki ucu sabit mesnetli, değişken kesitli, tek eksenli kompozit çubuk problemi göz önüne alınmıştır (0°). Çubuk uzunluğu $L=0.381\text{m}$ olup $b_0=h_0=0.0254\text{ m}$ 'dir. Malzeme sabitleri; elastisite modülleri $E_{11} = 144.8 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $E_{22} = E_{33} = 9.65 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, kayma modülleri $G_{12} = G_{13} = 4.14 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $G_{23} = 3.45 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ve Poisson oranları $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.3$, $\nu_{23} = 0.399$ ve $\rho = 1389.23 \text{ kg/m}^3$ olarak seçilmiştir. Kesit genişliği sabit, kesit yüksekliği değişmektedir. b_0 ve h_0 eleman başlangıcındaki kesit genişliği ve kesit yüksekliği olmak üzere kesit yüksekliği eleman boyunca lineer azalmaktadır. Bu durumda, kesit alanı, $A(x)$,

ve atalet momenti, $I(x)$, çubuk elemanı boyunca kesit yüksekliğine bağlı olarak değişmektedir. Çubuk boyunca kesit yüksekliğinin değişim fonksiyonu aşağıdaki ifade yardımı ile hesaplanmaktadır.

$$h(x) = h_o [1 - \beta(x/L)]$$

(27)

Burada, h_o başlangıçtaki kesit yüksekliği, β kesit değişim parametresi, x çubuk üzerindeki herhangi bir nokta ve L ise çubuk uzunluğunu göstermektedir.

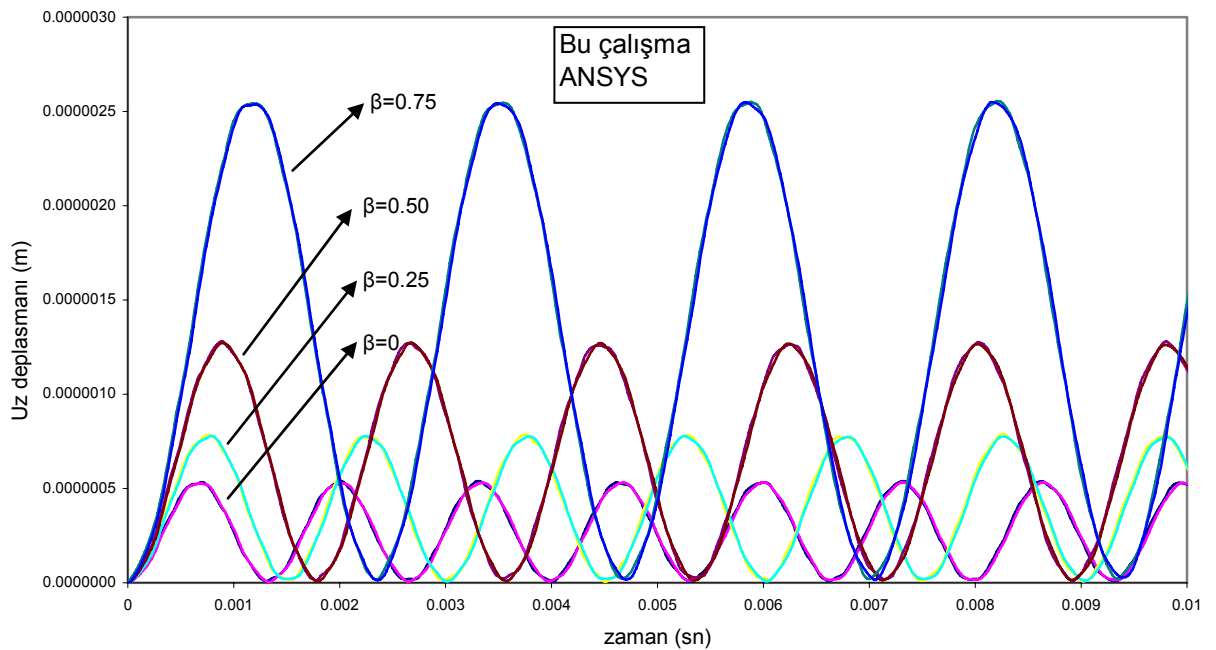
Farklı kesit değişim parametreleri için düzlemine dik temel frekanslar Tablo 1’de gösterilmiştir.

Tablo 1. Düzlemine dik temel frekanslar (Hertz)

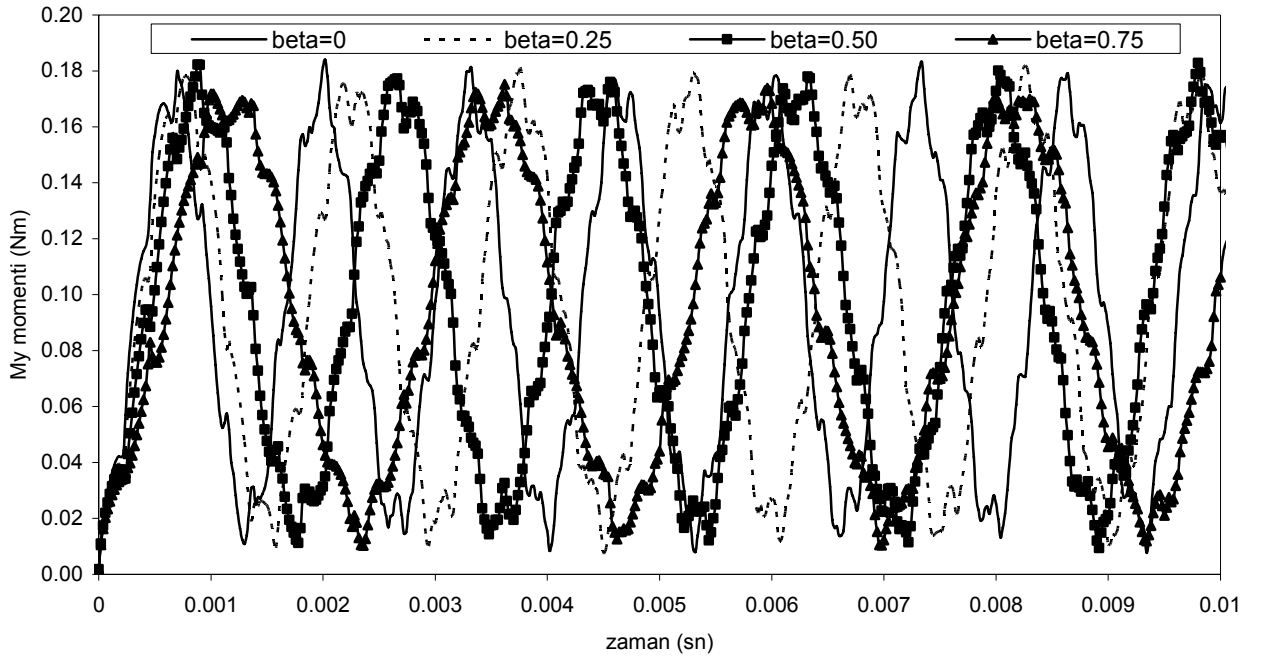
		$\beta=0$	$\beta=0.25$	$\beta=0.5$	$\beta=0.75$
SS	Bu Çalışma	753.22	665.36	560.88	427.28
	ANSYS	753.22	665.36	560.88	427.27

Tablo 1 incelendiğinde, önerilen bu yöntem ile elde edilen temel frekanslar ile ANSYS sonuçlarının uyum içinde olduğu görülmektedir. Problem, önerilen yöntemle sadece iki elemanla modellenirken, ANSYS programı ile çözüm yapılırken yüz elemanla modellenmiştir. Kesit değişim parametresi β artarken, temel frekans değerleri azaldığı gözlenmektedir.

Çubuk elemanının orta noktasına z-doğrultusunda $P_o = 1N$ şiddetinde adım tipi dinamik tekil yük uygulanmıştır. Farklı β oranları için çubuğun orta noktasındaki deplasman (U_z) ve eğilme momentinin (M_y) zamanla değişimleri gösterilmektedir (Şekil 3-4). Hesaplamalarda zaman artımı $dt=2*10^{-5}$ sn seçilmiştir.



Şekil 3. Kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 4. Kirişin orta noktasındaki momentin zamanla değişimi

Farklı kesit değişim parametreleri için (β), kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimleri ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmış ve elde edilen tüm sonuçların uyum içinde olduğu görülmüştür (Şekil 3). Ayrıca kesit alanı azaldıkça, hem titreşim periyotları hem de genlikleri artmaktadır.

Ayrıca, farklı kesit değişim parametreleri için kirişin orta noktasındaki eğilme momentinin zamanla değişimi gösterilmiştir (Şekil 4). Kesit alanı azalırken, titreşim periyodu artmakta, genlikleri ise yaklaşık olarak aynı kalmaktadır.

6. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Kompozit malzemeden yapılmış değişken kesitli doğru eksenli çubukların dinamik davranışı teorik olarak araştırılmıştır. Kanonik formda Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak problemin dinamik rijitlik matrisi hesaplanmıştır. Formülasyonda, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri de göz önüne alınmıştır.

İki ucu sabit mesnetli, kesit lineer olarak azalan kompozit kiriş problemi göz önüne alınmıştır. Kesit değişim parametresinin (β) dinamik davranışa etkisi incelenmiştir. Kesit boyutları azaldıkça temel frekans değerleri azalmaktadır. Ayrıca kesit boyutları azaldıkça, deplasman için kirişin hem titreşim periyodu hem de genlikleri artmaktadır. Eğilme momentinde ise sadece titreşim periyodları artmakta, genlikleri ise değişmemektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Cranch, E.T, and Adler, A.A., “Bending Vibration of Variable Section Beams” *Journal of Applied Mechanics, American Society Mechanical Engineers* 23 (1), 103-108, 1956.

- [2] Chen, Y.Z., and Xie, J.R., "Evaluation of Natural Frequencies of Non-Uniform Beams by Numerical Integration" *Computers & Structures* 29 (4), 693-697, 1985.
- [3] Eisenberger, M., and Reich, Y., "Static, Vibration and Stability Analysis of Non-Uniform Beams" *Computers & Structures* 31 (4), 567-573, 1989.
- [4] Jategaonkar, R. and Chehil, D.S., "Natural Frequencies of a Beam with Varying Section Properties" *Journal of Sound and Vibration* 133 (2), 303-322, 1989.
- [5] Lee, S.Y., Ke, H.Y., and Kuo, Y.H., "Analysis of Non-Uniform Beam Vibration" *Journal of Sound and Vibration* 142 (1), 15-29, 1990.
- [6] Eisenberger, M., "Exact Solution for General Variable Cross-Section Members" *Computers & Structures* 41 (4), 765-772, 1991.
- [7] Nakahira, N., Ozawa, K., and Mizusawa, T., "Vibration of Beams with Varying Cross-Sections by the Stodola-Newmark Method" *Computers & Structures* 43 (5), 999-1004, 1992.
- [8] Leung, A.Y.T., and Zhou, W.E., "Dynamic Stiffness Analysis of Non-Uniform Timoshenko Beams" *Journal of Sound and Vibration* 181 (3), 447-456, 1995.
- [9] Abrate, S., "Vibration of Non-Uniform Rods and Beams" *Journal of Sound and Vibration* 185 (4), 703-716, 1995.
- [10] Tong, X., Tabarrok, B., and Yeh, K.Y., "Vibration Analysis of Timoshenko Beams with Non-Homogeneity and Varying Cross-Section" *Journal of Sound and Vibration* 186 (5), 821-835, 1995.
- [11] Rao, S.R., and Ganesan, N., "Dynamic Response of Tapered Composite Beams using Higher Order Shear Deformation Theory" *Journal of Sound and Vibration* 187 (5), 737-756, 1995.
- [12] Rao, S.R., and Ganesan, N., "Dynamic Response of Non-Uniform Composite Beams" *Journal of Sound and Vibration* 200 (5), 563-577, 1997.
- [13] Romano, F., "Deflections of Timoshenko Beam with Varying Cross-Section" *International Journal of Mechanical Sciences* 38 (8-9), 1017-1035, 1996.
- [14] Qiusheng, L., Hong, C., and Guinqing, L., "Static and Dynamic Analysis of Straight Bars with Variable Cross-Section" *Computers & Structures* 59 (6), 1185-1191, 1996.
- [15] De Rosa, M.A., and Auciello, N.M., "Free Vibrations of Tapered Beams with Flexible Ends" *Computers & Structures* 60 (2), 197-202, 1996.
- [16] Ece, M.C., Aydogdu, M., and Taskın, V., "Vibration of a Variable Cross-Section Beam" *Mechanics Research Communication* 34, 78-84, 2007.
- [17] Çalım, F.F., "Viskoelastik, Anizotropik Eğri Eksenli Uzaysal Çubuk Sistemlerin Dinamik Analizi" ÇÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Adana, 2003.
- [18] Temel, B., Çalım, F.F., and Tütüncü, N., "Forced Vibration of Composite Cylindrical Helical Rods" *International Journal of Mechanical Sciences* 47(7), 998-1022, 2005.
- [19] Jones, R.M., "*Mechanics of Composite Materials*" NewYork: Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
- [20] Yıldırım, V., Sancaktar, E., and Kırıl, E., "Comparison of the In-Plane Natural Frequencies of Symmetric Cross-Ply Laminated Beams Based on the Bernoulli-Euler and Timoshenko Beam Theories" *Journal of Applied Mechanics, American Society Mechanical Engineers* 66, 410-417, 1999.
- [21] ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA 15342-1300, U.S.A.